

Die Propagatormethode in der Gitterraumtheorie

ERICH G. WEIDEMANN

Sektion Physik der Universität München *

(Z. Naturforsch. **24a**, 499—510 [1969]; eingegangen am 24. Dezember 1968)

The Feynman diagrams and rules of a field theory with local four fermion coupling are transformed into a theory of interacting fermions in a finite dimensional Hilbert space constructed on Z^3 points of a cubic lattice. The propagator is derived for the lattice space theory and the formal similarity and the qualitative differences are discussed and compared with conventional field theories. The mass produced by the interaction is calculated by compensation of the first order self-energy diagrams (Hartree-Fock-approximation). The solution for coupling constant $W > 0$ violates the chiral symmetry, the solution for $W < 0$ the cubic symmetry of the theory. The second order corrections to the mass operator are calculated. They diverge in the limit $Z \rightarrow \infty$ like \sqrt{Z} if W is proportional to \sqrt{Z} which is necessary for a finite mass in the HF-approximation. Under the same assumption the maximum divergence is like \sqrt{Z} in any order of the perturbation theory. The mass operator is finite including second order contributions if W is proportional to $\sqrt[4]{Z}$. In this case the higher order contributions decrease like $\sqrt{Z}^{-(n/2-1)}$.

1. Einführung

Die bisherigen Untersuchungen in der Gitterraumtheorie^{1/2} stützten sich fast ausschließlich auf Variationsrechnungen. Die Benutzung der Propagatormethode oder des Green-Funktionsformalismus bietet zwei wesentliche Vorteile:

1. Die Methode, die in der Feldtheorie der Elementarteilchen entwickelt wurde, ergibt eine Formulierung der Gitterraumtheorie, die die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu konventionellen Feldtheorien in jedem Schritt deutlich erkennen lässt. Da der Gitterraum vor allem betrachtet wird, um auf Kosten einer Verletzung der strengen Lorentz-Invarianz bei extrem kurzen Abständen mit den Ultraviolettdivergenzen auf eine andere Weise als durch die konventionellen Renormierungsverfahren fertig zu werden, ist die Formulierung für den Vergleich mit der Renormierungstheorie besonders geeignet.

2. Im Green-Funktionsformalismus sind systematische Verfahren zur Berechnung höherer Näherungen entwickelt worden, deren Überlegenheit gegenüber anderen Verfahren sich im letzten Jahrzehnt vor allem in der unrelativistischen Vielteilchenphysik bei der Berücksichtigung von Korrelationen gezeigt hat.

2. Feynman-Graphen und -Regeln für lokale Vierfermionenwechselwirkungen

Die Pole der 1-Teilchen-Green-Funktion liefern bekanntlich die Energien und Lebensdauern der elementaren Anregungen. Bei Zweikörperkräften lässt sich aus der 1-Teilchen-Green-Funktion auch die Energie des Grundzustandes berechnen. Um an Bekanntes anzuknüpfen, möchte ich zuerst nicht die Gitterraumtheorie diskutieren, sondern eine konventionelle Feldtheorie mit einer lokalen Vierfermionenwechselwirkung

$$H_W(t) = \int \mathcal{H}_W(x) d^3x \\ = g \int (\bar{\psi}(x) O_j \psi(x)) (\bar{\psi}(x) O^j \psi(x)) d^3x. \quad (1)$$

Die Felder sind Dirac-Spinoren, die nicht noch von anderen Indizes wie möglicherweise Isospin oder Strangeness abhängen, und sind im Wechselwirkungsbild, das wir in Gl. (1) voraussetzen, von den Raumzeitkoordinaten $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ bzw. $x_\mu = (t, -\mathbf{x})$ abhängig³. O_j sind dementsprechend 4×4 -Matrizen. In einem von NAMBU und JONA-LASINIO⁴ behandelten Modell dieser Art gilt

$$O_1 = 1, \quad O_2 = i \gamma_5. \quad (2)$$

In der Gitterraumtheorie gilt

$$O_j \rightarrow O_\mu = i \gamma_5 \gamma_\mu. \quad (3)$$

* Lehrstuhl Prof. BOPP, 8 München 13, Schellingstr. 2 bis 8/III.

¹ E. G. WEIDEMANN u. F. BOPP, Z. Phys. **204**, 311 [1967].

² E. G. WEIDEMANN, Grundzustand und Elementaranregungen der Urfermionen in der Hartree-Bogoliubov-Näherung, eingereicht als Habilitationsschrift, April 1968.

³ Bezuglich der Metrik und γ -Matrizen werden die Konventionen von J. D. BJORKEN und S. D. DRELL, Relativistische Quantenfeldtheorie (BI-Hochschultaschenbuch, Mannheim, 1967) verwendet. Insbesondere gilt $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = +1$.

⁴ Y. NAMBU u. G. JONA-LASINIO, Phys. Rev. **122**, 345 [1961].



Da viele Aussagen von der speziellen Wahl der O_j unabhängig sind, werden sie erst möglichst spät spezifiziert. Die freien Felder sollen Dirac-Teilchen ohne Masse sein. Sie werden also durch die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(x) &= i \bar{\psi}(x) (\gamma \cdot \nabla) \psi(x), \\ \gamma \cdot \nabla &= \gamma^\mu \nabla_\mu = \gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\end{aligned}\quad (4)$$

bzw. die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H}_0(x) = -i \bar{\psi}(x) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi(x) \quad (5)$$

beschrieben.

Die 1-Teilchen-Green-Funktion oder der vollständige Feynman-Propagator ist durch

$$S'_F(x - x')_{\mu\nu} = -i \langle T \psi_\mu^H(x) \bar{\psi}_\nu^H(x') \rangle \quad (6)$$

definiert, d.h. durch den Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes der angeschriebenen Feldoperatoren im Heisenberg-Bild bezüglich des physikalischen Vakuums. Bekanntlich liefert die Störungstheorie nach Transformation ins Wechselwirkungsbild für diese Größe den folgenden Ausdruck

$$S'_F(x - x')_{\mu\nu} = -i \langle 0 | T(\psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(x') S) | 0 \rangle_c. \quad (7)$$

$|0\rangle$ ist der Vakuumzustand für die freien Felder, in dem weder Teilchen noch Antiteilchen vorhanden sind. In der bisher in der Gitterraumtheorie verwendeten Sprache, in der die Teilchen-Antiteilchen-Transformation nicht durchgeführt wurde, ist das der Dirac-See der vollbesetzten negativen Energiezustände. Die S -Matrix ist durch

$$\begin{aligned}S &= T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} H_W(t) dt \right\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \dots d^4 x_n \quad (8) \\ &\quad \cdot T(\mathcal{H}_W(x_1) \dots \mathcal{H}_W(x_n))\end{aligned}$$

definiert. Der Index c in Gl. (7) besagt, daß man sich bei den Feynman-Graphen, auf die man die einzelnen Terme der Entwicklung abbilden kann, auf die zusammenhängenden Graphen zu beschränken hat, da sich die Vakuumanteile der unzusammenhängenden Graphen bei unbeschränkter Summation über alle Graphen in bekannter Weise gegen den dann in Gl. (7) hinzuzufügenden Nenner $\langle 0 | S | 0 \rangle$ wegheben.

Die Grundlage für die Abbildbarkeit der Terme der Störungsreihe auf Feynman-Graphen ist wie stets das Wicksche Theorem, das eine einfache Aus-

sage darüber macht, welche Terme beim Übergang von einem zeitgeordneten zu einem normalgeordneten Produkt von Feldoperatoren entstehen. Dabei werden die Operatoren ψ und $\bar{\psi}$ ganz oder zum Teil paarweise kontrahiert, während der Rest normalgeordnet ist. Da in Gl. (7) nur Erwartungswerte von Feldoperatoren bezüglich des zugehörigen Vakuumzustandes vorkommen, interessiert uns nur der vollständig kontrahierte Ausdruck. Die Kontraktion eines Operators $\psi_\mu(x)$ mit $\bar{\psi}_\nu(x')$ ist durch

$$\begin{aligned}\underline{\psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(x')} &= \\ &= \langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(x') | 0 \rangle \equiv i S_F(x - x')_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (9)$$

definiert, wenn $t \neq t'$, und durch

$$\begin{aligned}\underline{\psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(x)} &= \langle 0 | \psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(x) | 0 \rangle \\ &= i \lim_{\substack{t-t' \rightarrow +0 \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}'}} S_F(x - x')_{\mu\nu} \equiv i S_F(+0)_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\underline{\bar{\psi}_\nu(x) \psi_\mu(x)} &= \langle 0 | \bar{\psi}_\nu(x) \psi_\mu(x) | 0 \rangle \\ &= -i \lim_{\substack{t-t' \rightarrow -0 \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}'}} S_F(x - x')_{\mu\nu} \equiv -i S_F(-0)_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (11)$$

wenn $t = t'$ und damit bei der lokalen Wechselwirkung auch $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Denn Kontraktionen der zuletzt genannten Art entstehen nur, wenn man Operatoren im selben $\mathcal{H}_W(x)$ kontrahiert. Sie divergieren in der Feldtheorie und werden deshalb meist von vornherein beseitigt, indem man in der Wechselwirkungsenergie die Operatoren bereits als normalgeordnet voraussetzt. In der Gitterraumtheorie sind es zunächst endliche Terme, die man sauber berücksichtigen und damit nachprüfen kann, ob sich gefährliche Terme kompensieren, bevor man den Grenzübergang zum Kontinuum macht. $S_F(x - x')$ ist, wie Gl. (7) für $H_W = 0$ zeigt, der Propagator für die freien Teilchen und ist bekanntlich durch

$$S_F(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} S_F(p) \quad (12)$$

mit

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p - m + i\varepsilon} = \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (13)$$

gegeben.

Die Feynman-Regeln für lokale Vierfermionenwechselwirkungen sind nicht ganz so geläufig wie für Yukawa-Kopplungen, wie man sie z.B. in der Quantenelektrodynamik und der pseudoskalaren Mesontheorie hat. In der Theorie der Vielteilchensysteme sind sie der Normalfall, da man es fast immer mit Zweikörperkräften zu tun hat, aber dort sind die Wechselwirkungen im allgemeinen nicht

lokal. Die Lokalität hat zur Folge, daß sich die Regeln wesentlich vereinfachen, insbesondere weil man sich von der expliziten Angabe der Spinindizes frei machen kann.

Die lokale Vierfermionenwechselwirkung findet in einem Raumzeitpunkt x statt, so daß der Vertex die in Abb. 1a angegebene Form



Abb. 1. Vertex für eine lokale Vierfermionenwechselwirkung.

hat, wobei zwei Linien zum Vertex hin und zwei von ihm weg laufen entsprechend den beiden Operatoren ψ bzw. $\bar{\psi}$ in der Wechselwirkung.

Um die Spinorindizes zu vermeiden ist es jedoch zweckmäßig, den Vertex zu einer Wechselwirkungsleitung auseinanderzuziehen (Abb. 1b), so daß man die Fermionlinien verfolgen und die beiden Fälle in Abb. 2,



Abb. 2. Topologisch verschiedene Verteilung der Spinorindizes.

die in der ursprünglichen Darstellung des Vertex topologisch identisch sind, unterscheiden kann. Das hat den Vorteil, daß man die gleichen Graphen wie in der Quantenelektrodynamik erhält. Man hat nur zu beachten, daß die Enden einer Wechselwirkungsleitung zum selben Raumzeitpunkt gehören, was man formal auch dadurch erreichen kann, daß man für diese Linien eine vierdimensionale δ -Funktion als

„Propagator“ einführt. Da in der Fourier-Transformierten der δ -Funktion alle Frequenzen gleich häufig vorkommen, hat das zur Folge, daß der Wechselwirkungsleitung beim Übergang zum Impulsraum nicht ein einzelner Impuls zuzuordnen ist, sondern daß sie jeden Impuls übertragen kann, so daß nur die Summe der Impulse der einlaufenden Fermionlinien gleich der Summe der Impulse der auslaufenden Fermionlinien sein muß. Noch ein Unterschied ist zu beachten: Die Ordnung eines Graphen und damit die Potenz der Koppelungskonstanten ist durch die Zahl der Wechselwirkungsleitungen und nicht durch die Zahl der Ecken bestimmt, an denen eine Fermionlinie mit einer Wechselwirkungsleitung zusammenstoßen.

Am klarsten werden diese Unterschiede, wenn wir die Terme niedrigster Ordnung genauer anschauen, die sowieso für das folgende gebraucht werden. Die Graphen für die 1-Teilchen-Green-Funktion haben eine einlaufende und eine auslaufende Linie, entsprechend den Operatoren $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x')$, über deren Variablen in Gl. (7) nicht integriert wird. Der einzige zusammenhängende Graph erster Ordnung ist in der verkürzten Darstellung in Abb. 3a angegeben. Aus ihm entstehen die Graphen Abb. 3b und c,

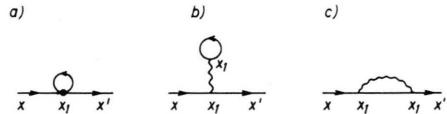


Abb. 3. Selbstenergiegraphen erster Ordnung.

wenn man den Wechselwirkungspunkt zu einer Linie auseinanderzieht. Der Graph b) entspricht den beiden vollständigen Kontraktionen

$$\langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}(x_1) O_j \psi(x_1) \bar{\psi}(x_1) O^j \psi(x_1) \bar{\psi}_\nu(x') | 0 \rangle, \quad (14)$$

die beide nach dem Wickschen Theorem dasselbe Ergebnis

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}_{\mu_1}(x_1) | 0 \rangle O_{j\mu_1\mu_2} \langle 0 | T \psi_{\mu_2}(x_1) \bar{\psi}_\nu(x') | 0 \rangle \langle 0 | \bar{\psi}_{\nu_1}(x_1) \psi_{\nu_2}(x_1) | 0 \rangle O_{\nu_1\nu_2}^j \\ = -i^3 (S_F(x - x_1) O_j S_F(x_1 - x'))_{\mu\nu} \text{Sp}(S_F(-0) 0^j) \quad (15) \end{aligned}$$

liefern. Analog entspricht der Graph c) den Kontraktionen

$$\langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}(x_1) O_j \psi(x_1) \bar{\psi}(x_1) O^j \psi(x_1) \bar{\psi}_\nu(x') | 0 \rangle. \quad (16)$$

Die oben angegebenen Kontraktionen ergeben

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}_{\mu_1}(x_1) | 0 \rangle O_{j\mu_1\mu_2} \langle 0 | \psi_{\mu_2}(x_1) \bar{\psi}_{\mu_3}(x_1) | 0 \rangle O^j_{\mu_3\mu_4} \langle 0 | T \psi_{\mu_4}(x_1) \bar{\psi}_r(x') | 0 \rangle \\ = i^3 (S_F(x - x_1) O_j S_F(+0) O^j S_F(x_1 - x'))_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (17)$$

die unten angegebenen liefern das Ergebnis

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi_\mu(x) \bar{\psi}_{\mu_1}(x_1) | 0 \rangle O_{j\mu_1\mu_2} \langle 0 | \bar{\psi}_{\mu_3}(x_1) \psi_{\mu_2}(x_1) | 0 \rangle O^j_{\mu_3\mu_4} \langle 0 | T \psi_{\mu_4}(x_1) \bar{\psi}_r(x') | 0 \rangle \\ = i^3 (S_F(x - x_1) O_j S_F(-0) O^j S_F(x_1 - x'))_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (18)$$

das sich von Gl. (17) nur durch den Grenzwert $S_F(-0)$ statt $S_F(+0)$ unterscheidet. Insgesamt erhält man in der ersten Ordnung

$$S_F^{(1)}(x - x') = -2ig \int d^4x_1 S_F(x - x_1) O_j (Sp S_F(-0) O^j - S_F(0) O^j) S_F(x_1 - x'), \quad (19)$$

mit der Abkürzung

$$S_F(0) = \frac{1}{2}(S_F(+0) + S_F(-0)). \quad (20)$$

Vergleicht man die analytischen Ausdrücke mit den Graphen, so kann man die Feynman-Regeln für die lokale Vierfermionenwechselwirkung angeben, insbesondere wenn man auf die gleiche Weise noch die Terme zweiter Ordnung behandelt. Den Fermionlinien sind die Propagatoren S_F zuzuordnen, den Vertizes die Matrizen O_j . Diese Faktoren sind als Matrixprodukte in der Reihenfolge aufzuschreiben, wie sie beim Verfolgen einer Fermionlinie auftreten. Bei in sich geschlossenen Fermionlinien ist die Spur zu bilden und sie tragen einen Faktor -1 zum Gesamtausdruck bei. Es sind im wesentlichen die Regeln der Quantenelektrodynamik mit der Abänderung, daß der Photonpropagator durch eine δ -Funktion und e^2 durch $2g$ zu ersetzen ist. Außerdem hatten wir gesehen, daß geschlossene Schleifen mit nur einer Wechselwirkung den Faktor $S_F(-0)$, Wechselwirkungslinien zwischen benachbarten Punkten einer Fermionlinie den durch Gl. (20) definierten Faktor $S_F(0)$ — das arithmetische Mittel zwischen beiden Grenzwerten — beitragen. Durch Fourier-Transformation kann man zum Impulsraum übergehen, was wegen der Translationsinvarianz zu Vereinfachungen führt.

3. Der Propagator in der Gitterraumtheorie

Welche Unterschiede ergeben sich, wenn man vom Kontinuum zum Gitterraum übergeht? Zum Gitterraum kommt man, wenn man nicht nur im Ortsraum, wie man das häufig tut, zu einem endlichen Periodizitätsvolumen übergeht, sondern zusätzlich auch noch im Impulsraum. Ähnlich wie bei der konventionellen Einführung des Volumens im Ortsraum kann man auch für den Übergang zum Gitter-

raum rezeptmäßige Vorschriften angeben, mit denen man Beziehungen in der Kontinuumstheorie in die Gitterraumtheorie übersetzen kann.

Im Ortsraum wurde ein kubisches Gitter mit der Gitterkonstanten a gewählt, so daß auch das reziproke Gitter, das im wesentlichen den Impulsraum bildet, wieder kubisch ist und zwar mit der Gitterkonstanten $2\pi/L$. Man betrachtet ein Periodizitätsvolumen mit Z^3 Punkten, so daß die Kantenlänge des Kubus $L = Za$ ist. Beim Grenzübergang zum Kontinuum lassen wir $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ gehen, so daß die Zahl der Punkte pro Volumeneinheit immer dichter und das Volumen immer größer wird. Die beiden Grenzübergänge werden in einer bestimmten Weise gekoppelt, indem man $a = l/\sqrt{Z}$ setzt und $Z \rightarrow \infty$ gehen läßt, so daß L wie l/\sqrt{Z} gegen Unendlich geht. Wesentlich ist, daß der Grenzübergang erst nach Ausrechnung der Erwartungswerte, also mit c -Zahlen durchgeführt wird, so daß man in einem endlichen Hilbert-Raum rechnen kann und die schwierigen mathematischen Probleme des unendlichen Hilbert-Raums, wie z. B. die Existenzprobleme für die Operatoren und die Möglichkeit nicht unitär äquivalenter Darstellungen, nicht auftreten.

Ich möchte jetzt die Vorschriften angeben, mit denen man den Übergang von der Kontinuumstheorie zur Gitterraumtheorie vollziehen kann und umgekehrt. In der vierkomponentigen Gitterraumtheorie wurde die Wechselwirkung⁵

$$H_W = W \sum_n (\bar{\psi}(\mathbf{n}) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(\mathbf{n})) (\bar{\psi}(\mathbf{n}) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(\mathbf{n})) \quad (21)$$

⁵ F. BOPP, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **13** [1967].

benutzt, wobei $\psi(\mathbf{n})$ und $\psi^+(\mathbf{n})$ die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren im Schrödinger-Bild für ein Urfermion im Gitterpunkt \mathbf{n} bedeuten. Da im kubischen Gitter auf jede Gitterzelle vom Volumen a^3 ein Punkt entfällt, sind Gittersummen gemäß

$$\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \int (1/a^3) d^3x \quad (22)$$

durch Integrale im Ortsraum zu ersetzen. Damit $\psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$ die Teilchendichte bedeutet, muß

$$\sum_{\mathbf{n}} \psi^+(\mathbf{n}) \psi(\mathbf{n}) \rightarrow \int d^3x \psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (23)$$

übergehen, so daß

$$\psi(\mathbf{n}) \rightarrow a^{3/2} \psi(\mathbf{x}) \quad (24)$$

den Zusammenhang mit den Feldoperatoren angibt. Wegen

$$\delta_{nn'} \rightarrow a^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (25)$$

geht dann in den kanonischen Vertauschungsrelationen das Kronecker-Symbol in die δ -Funktion über, wie es sein muß.

Macht man diese Ersetzungen in Gl. (21), so ergibt sich der Zusammenhang

$$g = W a^3 \quad (26)$$

zwischen den Koppelungskonstanten in der Kontinuum- und Gitterraumtheorie. Da a wie $1/Z^{1/2}$ gegen Null geht, bedeutet eine endliche Konstante in der Gitterraumtheorie eine verschwindende Koppelungskonstante in der Kontinuumstheorie. Endliches g erhält man nur, wenn $W \sim Z^{3/2}$ wächst. Die Freiheit W von Z abhängig zu machen, bietet eine neue Möglichkeit, Divergenzen beim Grenzübergang zu unterdrücken, die man in den üblichen Theorien mit Abschneidefaktoren bisher nicht betrachtet hat, da sie mit der Interpretation der Abschneidefunktionen als Formfaktoren für ausgedehnte Teilchen nicht im Einklang ist.

An die Stelle der infinitesimalen Translation tritt im Gitter die Translation um eine Gitterkonstante. Die Fourier-Transformation liefert einen Vektor \mathbf{h} , dessen Komponenten die Millerschen Indizes sind.

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow e^{i(2\pi/L)\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}a} = e^{i(2\pi/Z)\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}}. \quad (27)$$

Davon zu unterscheiden ist im Gitter der Vektor mit den Komponenten

$$p_j = (Z^{1/2}/l) \sin(2\pi h_j/Z), \quad j = 1, 2, 3, \quad (28)$$

der die Rolle des Impulses in der Dirac-Gleichung übernimmt, wie Bopp in der ersten Arbeit über die

Dirac-Gleichung im Gitterraum⁶ gezeigt hat. Mit dieser Ersetzung des Impulses geht der Hamilton-Operator für die freien Dirac-Teilchen in den der Gitterraumtheorie

$$H_0 = \sum_{\mathbf{h}} \tilde{\psi}(\mathbf{h}) \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \tilde{\psi}(\mathbf{h}) \quad (29)$$

über, wobei $\tilde{\psi}(\mathbf{h})$ die Fourier-Transformierte von $\psi(\mathbf{n})$ ist.

Benutzt man noch die übliche Ersetzung von Integralen im Impulsraum durch Summen bei Einführung eines Volumens

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \rightarrow \frac{1}{(Za)^3} \sum_{\mathbf{h}}, \quad (30)$$

so kann man den Propagator der Gitterraumtheorie aus dem der Feldtheorie mit den genannten Vorschriften unmittelbar übertragen.

$$\begin{aligned} S_F(n - n') &= -i \langle 0 | T \psi(n) \bar{\psi}(n') | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{Z^3} \sum_{\mathbf{h}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\mathbf{h} \cdot (n-n')} S_F(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{mit } S_F(\mathbf{h}) = \frac{1}{\gamma \cdot p - m + i\epsilon} \quad (32)$$

Dabei wurden die vierdimensionalen Variablen

$$n^\mu = (t, \mathbf{n}), \quad h^\mu = \left(\omega, \frac{2\pi}{Z} \mathbf{h} \right), \quad p^\mu = (\omega, \mathbf{p}) \quad (33)$$

mit \mathbf{p} aus Gl. (28) eingeführt. $\psi(n)$ sind im Gegensatz zu $\psi(\mathbf{n})$ die Operatoren im Wechselwirkungsbild. m ist wie schon in Gl. (13) ein zunächst freier Parameter, den man durch Hinzufügen eines Massenterms in H_0 einführen kann und über dessen Bestimmung noch zu sprechen ist.

Die Übertragung des Propagators in die Gitterraumtheorie ist wohl unmittelbar plausibel. Man kann ihn aber natürlich auch ableiten, indem man die einzelnen Schritte bei der üblichen Berechnung des Propagators in der Gitterraumtheorie nachvollzieht, also die Zerlegung der Fourier-Entwicklung von $\psi(n)$ in positive und negative Frequenzanteile, die Teilchen-Antiteilchentransformation und die Darstellung der Θ -Funktionen, die die Fälle $t - t' > 0$ oder < 0 unterscheiden, durch komplexe Integrationen in der ω -Ebene.

Vergleicht man die Störungstheorie für die 1-Teilchen-Green-Funktion innerhalb der Feldtheorie mit lokaler Vierfermionenwechselwirkung mit den entsprechenden Rechnungen der Gitterraumtheorie, so

⁶ F. BOPP, Z. Phys. **200**, 117 [1967].

sieht man, daß der einzige Unterschied in der Ersetzung des Propagators der freien Teilchen durch Gl. (31) und der Koppelungskonstanten gemäß Gl. (26) ist und daß nicht p , sondern \hbar die an den Vertizes erhaltene Größe ist. Die mögliche Z -Abhängigkeit der Koppelungskonstanten wurde bereits erwähnt. Der Propagator sieht formal sehr ähnlich aus wie in der konventionellen Theorie. Zu beachten ist jedoch, daß \hbar nur in der Kombination $\xi = (2\pi/Z)\hbar$ vorkommt, so daß man für große, aber durchaus noch endliche Z

$$\frac{1}{Z^3} \sum_{\hbar} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d^3\xi \quad (34)$$

ersetzen kann, da $|h_j| \leq Z/2$. Man erhält also vom Grenzübergang unabhängige endliche Grenzen, während diese bei konventionellen Abschneideverfahren gegen Unendlich gehen. Ein wesentlicher Unterschied ist die geänderte Dispersion durch die Einführung des Gitters. Die Pole des Propagators liegen im Falle $m = 0$ bei

$$E(\mathbf{p}) = \pm |\mathbf{p}|. \quad (35)$$

Bei Bewegung in der 1-Richtung hat man als Dispersionskurve eine Sinusfunktion, Abb. 4,

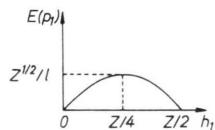


Abb. 4. Dispersionskurve für das masselose Fermion im Gitterraum.

also im linearen Bereich bei $h_1 = 0$ die Dispersionskurve eines masselosen Dirac-Teilchens. Bei $h_1 = Z/4$ hat man dagegen wegen der horizontalen Tangente eine unendliche Zustandsdichte dh_1/dE , so daß die Umgebung dieses Punktes einen wesentlichen Beitrag zu den Integralen ergibt. Trotz der formalen Ähnlichkeit zwischen den Propagatoren in der Gitterraum- und Feldtheorie hat man also erhebliche qualitative Unterschiede. Die Feynman-Regeln und -Graphen sind dagegen gleich.

4. Die Massenbestimmung

Die Bestimmung der Masse in der Hartree-Fock-Näherung, die als zunächst noch freier Parameter in den Propagator eingeführt wurde, läßt sich nun mittels der Graphen sehr einfach durchführen. Die

Resultate unterscheiden sich qualitativ, je nachdem ob man die Koppelungskonstante im Gitterraummodell positiv oder negativ wählt. Man fügt zu H_0 einen Massenterm hinzu und zieht ihn von der Wechselwirkung wieder ab, so daß die neue Wechselwirkungsenergiedichte

$$\mathcal{H}'_W = \mathcal{H}_W - m \bar{\psi} \psi \quad (36)$$

ist. Damit kommt ein neuer Vertex mit einer einlaufenden und einer auslaufenden Linie in die Störungstheorie hinein, den man üblicherweise durch ein Kreuz kennzeichnet.

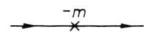


Abb. 5. Zusätzlicher Vertex durch die Massenkorrektur.

Die Masse wird nun so bestimmt, daß dieser Graph die Graphen erster Ordnung kompensiert also durch die symbolische Gleichung

$$\text{---} \circ \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \times \text{---} = 0 \quad (37)$$

Man nennt das Verfahren Kompensation gefährlicher Graphen und es ist bekannt, daß es bei Systemen mit endlich vielen Teilchen mit der Hartree-Fock-Näherung identisch ist. Die Begründung hierfür findet man z. B. in einer Arbeit von GOLDSTONE⁷. Die Äquivalenz ist unmittelbar plausibel, da man in der HF-Rechnung ein selbstkonsistentes Feld so bestimmt, daß die Energie ein Minimum wird. Das aber hat zur Folge, daß die Störungstheorie erster Ordnung keinen Beitrag gibt, wenn man von der HF-Lösung ausgeht.

Gl. (37) ist wegen Gl. (19) zu der analytischen Gleichung

$$-2iW O_j (\text{Sp}(S_F(-0) O^j) - S_F(0) O^j) = m \quad (38)$$

äquivalent, wobei aus Gl. (31) durch Integration in der ω -Ebene mittels des Residuensatzes

$$S_F(\pm 0) = \frac{1}{2iZ^3} \sum_{\hbar} \pm \gamma_0 E(\mathbf{p}) + m, \quad E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (39)$$

folgt. Die Spur gibt keinen Beitrag, da sie für ein Produkt von γ -Matrizen, das γ_5 enthält, verschwindet. In $S_F(0)$ fällt γ_0 heraus und wegen

$$i\gamma_5\gamma_{\mu}i\gamma_5\gamma^{\mu} = 4$$

⁷ J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc. London A **239**, 267 [1957].

ergibt sich das früher¹ mit der Variationsrechnung gewonnene Ergebnis

$$m = m \frac{4W}{Z^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (40)$$

mit der trivialen Lösung $m = 0$ und einer Lösung $m \neq 0$, wenn man $W = W_0 / \bar{Z} > 0$ setzt und W_0 hinreichend groß wählt. Wie in der BCS-Theorie der Supraleitung ergibt sich eine nichtanalytische Abhängigkeit der Masse von der Koppelungskonstanten und zwar hier bereits in der HF-Näherung.

Der skalare Ansatz für den Massenoperator verletzt die chirale Symmetrie der Theorie, d.h. die Invarianz gegenüber der Transformation

$$\psi \rightarrow e^{-i(\alpha/2)\chi} \psi e^{i(\alpha/2)\chi}, \quad (41)$$

wobei χ die Chiralität, also im Gitterraum

$$\chi = \sum_{\mathbf{n}} \psi^+(\mathbf{n}) \gamma_5 \psi(\mathbf{n}) \quad (42)$$

ist. Die Transformation (41) im Hilbert-Raum bewirkt die Touschek-Transformation der Felder im Spinorraum

$$\psi \rightarrow e^{i(\alpha/2)\gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i(\alpha/2)\gamma_5}. \quad (43)$$

Man sieht daraus sofort, daß der Vektor $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ und der axiale Vektor $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$ Invarianten sind, so daß es sich um eine Symmetrieroberation der Gitterraumtheorie handelt.

Dasselbe gilt auch für die Wechselwirkung von NAMBU⁴, da

$$\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} \psi = \cos \alpha \bar{\psi} \psi + \sin \alpha \bar{\psi} i \gamma_5 \psi, \quad (44)$$

$$\bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rightarrow \bar{\psi} i \gamma_5 e^{i\alpha\gamma_5} \psi = -\sin \alpha \bar{\psi} \psi + \cos \alpha \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \quad (45)$$

übergeht, also eine Drehung im Vektorraum mit der Basis $\bar{\psi} \psi$, $\bar{\psi} i \gamma_5 \psi$ bewirkt, die $(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2$ invariant läßt. Die Verletzung der chiralen Symmetrie und der damit zusammenhängende Problemkreis, wie z.B. die Existenz eines pseudoskalaren Goldstone-Bosons der Masse Null, ist bereits von NAMBU⁴ und in nachfolgenden Arbeiten⁸ ausführlich diskutiert worden und man kann die Ergebnisse im wesentlichen in die Gitterraumtheorie übernehmen. Eine Folge ist, daß außer $m \bar{\psi} \psi$ auch $m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi$ sowie

jede Linearkombination mit Koeffizienten, deren Quadratsumme gleich 1 ist (siehe Gl. (44)), dieselbe Massengleichung und dieselbe Grundzustandsenergie ergibt.

Neben diesen Lösungen, die den Fall $W > 0$ erschöpfen, gibt es, wie der Verfasser in seiner Habilitationsschrift² gezeigt hat, auch im Fall $W < 0$ Lösungen von Gl. (37), die zu einer niedrigeren Grundzustandsenergie führen als die triviale Lösung für masselose Teilchen, die es stets gibt. Diese Lösungen hat Nambu nicht diskutiert, obwohl es sie auch in der Kontinuumstheorie gibt. Der Grund dafür ist, daß sie die Lorentz-Invarianz verletzen. Man erhält sie, wenn man anstelle von $m \bar{\psi} \psi$ den Term $\bar{\psi} M \psi$ zu H_0 addiert und von H_W subtrahiert, wobei M eine beliebige 4×4 -Matrix ist, die durch Gl. (38) mit M statt m auf der rechten Gleichungsseite und im Propagator selbstkonsistent bestimmt wird. Die Ansätze

$$M = -\gamma \cdot A, \quad M = -\gamma_5 (\gamma \cdot B) \quad (46)$$

mit durch die Selbstkonsistenzforderung zu bestimmenden Vektoren A und B , deren nullte Komponente verschwindet, sind im Fall $W < 0$ die einzigen Lösungen, die zu einer Energieabsenkung gegenüber dem Grundzustand der masselosen Teilchen führen, und zwar liefert die Lösung $M = -\gamma_5 (\gamma \cdot B)$ die tiefste Energie. Bei der Auswahl der stabilsten Lösung zeigt sich ein Vorteil der Gitterraumtheorie, da die Energien endlich sind und bei mehreren Lösungen miteinander verglichen werden können, während sie in der Kontinuumstheorie nach minus Unendlich divergieren.

Die Lösungen (46) verletzen offensichtlich auch in der Gitterraumtheorie eine Symmetrie, nämlich die Invarianz gegenüber den Decktransformationen des kubischen Gitters. Daß solche Symmetrieverletzungen innerhalb einer bestimmten Näherung zugelassen werden sollten auch dann, wenn der wirkliche Grundzustand die Symmetrie nicht bricht, zeigt die Anwendung der HF-Näherung auf anderen Gebieten der Physik wie der Atomphysik, Kernphysik und Festkörperphysik, die man mit dem Schlagwort „unrestricted HF-method“ bezeichnet. So bekommt man z.B. in der Kernphysik gute Näherungen für deformierte Kerne, wenn man Slater-Determinanten zuläßt, bei denen die 1-Teilchenfunktionen nicht zu einem scharfen Gesamtdrehimpuls gekoppelt sind, so daß die Rotationsinvarianz verletzt wird. Durch die Variationsrechnung

⁸ Y. NAMBU u. G. JONA-LASINIO, Phys. Rev. **124**, 246 [1961]. — J. GOLDSTONE, A. SALAM u. S. WEINBERG, Phys. Rev. **127**, 965 [1962]. — H. BANERJEE, Nuovo Cim. **23**, 587 [1962]. — M. BAKER u. S. L. GLASHOW, Phys. Rev. **128**, 2462 [1962]. — M. BAKER, K. JOHNSON u. B. W. LEE, Phys. Rev. **133**, B 209 [1964].

erhält man dann im allgemeinen nicht automatisch einen Grundzustand, für den J eine gute Quantenzahl ist. Diesen bekommt man vielmehr zusammen mit einer Rotationsbande durch Projektion der Anteile mit verschiedenem J . Diese Zustände sind Superpositionen von Slater-Determinanten und man kann daher das Verfahren als einen Trick verstehen, um Korrelationen zu erfassen, ohne Variationsrechnungen mit komplizierten Konfigurationsüberlagerungen durchführen zu müssen. Im Prinzip kann man jede Invarianz verletzen einschließlich der Eichinvarianz, was dann zur Hartree-Bogoliubov-Näherung führt.

Für den ersten Ansatz aus Gl. (46)

$$M = -\gamma \cdot A = +\gamma \cdot A$$

ergibt sich der Propagator

$$\begin{aligned} S_F(h) &= \frac{1}{\gamma \cdot p - M} = \frac{1}{\gamma^\circ \omega - \gamma \cdot (p + A)} \\ &= \frac{\gamma^\circ \omega - \gamma \cdot (p + A)}{\omega^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{A}|^2} \end{aligned} \quad (47)$$

im Impulsraum, so daß analog zu Gl. (39)

$$S_F(\pm 0) = \frac{1}{2iZ^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\pm \gamma^\circ |\mathbf{p} + \mathbf{A}| - \gamma \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{A})}{|\mathbf{p} + \mathbf{A}|} \quad (48)$$

folgt. Aus Gl. (38) ergibt sich daraus wegen

$$i\gamma_5 \gamma_\mu (\gamma \cdot a) i\gamma_5 \gamma^\mu = -\gamma_\mu (\gamma \cdot a) \gamma^\mu = +2\gamma \cdot a$$

die früher² ausführlich diskutierte Selbstkonsistenzbedingung für den Vektor \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = -\frac{2W}{Z^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{A}}{|\mathbf{p} + \mathbf{A}|}. \quad (49)$$

Beim zweiten Ansatz $M = -\gamma_5(\gamma \cdot B)$ möchte ich mich hier darauf beschränken zu zeigen, daß die Pole des Propagators bei $\omega = \pm |\mathbf{p} \pm \mathbf{B}|$ liegen. In diesem Fall ist

$$S_F(h) = \frac{1}{\gamma \cdot p - M} = \frac{\gamma \cdot p + M}{p^2 - M^2 + [\gamma \cdot p, M]}. \quad (50)$$

Wegen

$$\begin{aligned} -[\gamma \cdot p, \gamma_5(\gamma \cdot B)] &= +\gamma_5 \{\gamma \cdot p, \gamma \cdot B\} = \\ &+ 2\gamma_5 p \cdot B \quad \text{und} \quad M^2 = -B^2 \end{aligned}$$

folgt daraus

$$S_F(h) = \frac{(\gamma \cdot p - \gamma^5(\gamma \cdot B))(p^2 + B^2 - 2\gamma^5 p \cdot B)}{(p^2 + B^2)^2 - 4(p \cdot B)^2}. \quad (51)$$

Der Nenner läßt sich auf die Form

$$\begin{aligned} &(\omega^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{B}^2)^2 - 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})^2 \\ &= (\omega + |\mathbf{p} + \mathbf{B}|)(\omega - |\mathbf{p} + \mathbf{B}|)(\omega + |\mathbf{p} - \mathbf{B}|) \\ &\quad \times (\omega - |\mathbf{p} - \mathbf{B}|) \end{aligned} \quad (52)$$

bringen, aus der sich die Nullstellen sofort ablesen lassen.

5. Störungstheorie höherer Ordnung für den Massenoperator

Wir haben uns in allen weiteren Rechnungen für den einfacheren Fall einer positiven Koppelungs- konstanten entschieden. Um zu erfahren, ob durch die Elimination der Graphen erster Ordnung die Divergenzen des Massenoperators in den höheren Näherungen beseitigt sind, werden zunächst mit dem HF-Propagator die Terme zweiter Ordnung berechnet.

Verwendet man Gl. (37), so bleiben in der Störungstheorie zweiter Ordnung mit dem Störoperator H'_W nur die eigentlichen Selbstenergiegraphen Abb. 6a und b



Abb. 6. Selbstenergiegraphen zweiter Ordnung in HF-Näherung.

übrig, da sich die übrigen Graphen kompensieren, wie Abb. 7 zeigt.

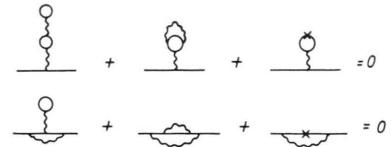


Abb. 7. Kompensation von Selbstenergiegraphen zweiter Ordnung in HF-Näherung.

Alle restlichen Graphen sind uneigentlich, d.h. sie lassen sich durch Zerschneiden einer Fermionlinie in zwei getrennte Teile zerlegen und tragen daher nicht zum Massenoperator bei. Die Graphen a) und b) sind besonders interessant, da sie aus dem Graphen erster Ordnung durch Einfügen des Vakuumpolarisations- bzw. Vertexteils niedrigster Ordnung entstehen und in der Quantenelektrodynamik zu logarithmischen Divergenzen Anlaß geben.

Die Kompensation von je drei Graphen, die wir hier in der zweiten Ordnung diskutiert haben, ge-

schieht auch in allen höheren Näherungen. Damit fällt der durch die Massenkorrektur eingeführte Vertex stets heraus zusammen mit den Kontrakt-

tionen innerhalb einer Wechselwirkungsdichte, die die Propagatoren $S_F(\pm 0)$ zwischen den Punkten $n - n' = 0$ liefern.

Unter Verwendung der Feynman-Regeln im Impulsraum erhält man für den Graphen a) den folgenden Beitrag zum Massenoperator

$$\sum^{(a)}(h) = \frac{4W^2}{Z^6} \sum_{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} O_j S_F(h + h_1 - h_2) O_k \text{Sp}(S_F(h_1) O^j S_F(h_2) O^k), \quad (53)$$

für den Graphen b) einen analogen Ausdruck ohne die Spurbildung und mit negativem Vorzeichen wegen der geschlossenen Fermionlinie in a).

$$\sum^{(b)}(h) = - \frac{4W^2}{Z^6} \sum_{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} O_j S_F(h + h_1 - h_2) O_k S_F(h_1) O^j S_F(h_2) O^k. \quad (54)$$

Die Impulsvariablen liest man aus dem verkürzten Graphen Abb. 8 ab, zu dem beide Diagramme entarten, wenn man die Wechselwirkungslinien zu einem Punkt zusammenschrumpfen lässt.

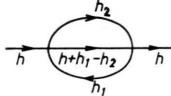


Abb. 8. Impulserhaltung im Selbstenergiegraphen zweiter Ordnung.

Ich habe sie in der vierkomponentigen Gitterraumtheorie berechnet. Man bringt wie in Gl. (13) durch Multiplikation der Propagatoren mit

$$(\gamma \cdot p + m)/(\gamma \cdot p + m)$$

die γ -Matrizen in den Zähler, reduziert die Matrixprodukte mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\begin{aligned} \gamma_\mu (\gamma \cdot a) \gamma^\mu &= -2 \gamma \cdot a, \\ \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) \gamma^\mu &= 4 a \cdot b, \\ \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) \gamma^\mu &= -2 (\gamma \cdot c) (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot a) \end{aligned}$$

usw. und führt die Integrationen über ω_1 und ω_2 mit dem Residuensatz auf die Beiträge der Pole zurück (siehe Anhang). Die Ausdrücke divergieren wie \sqrt{Z} , wenn man wie bisher $W = W_0 \sqrt{Z}$ setzt. Die Divergenz entsteht durch den Graphen b), während a) einen von Z unabhängigen Beitrag liefert.

Verwendet man die Wechselwirkung von NAMBU⁴ Gl. (2), im Gitterraum, so erhält man in der HF-Näherung eine Massengleichung, die mit Gl. (40) identisch ist. In diesem Fall gibt der Graph b) einen endlichen Beitrag zum Massenoperator, während der Beitrag des Graphen a) wie $1/Z$ verschwindet. In der nächst höheren Ordnung scheint aber auch in diesem Fall der Massenoperator wie $Z^{1/2}$ zu diver-

gieren, wie die Untersuchung einzelner Graphen gezeigt hat.

Für die n -te Ordnung läßt sich eine Abschätzung für die Z -Abhängigkeit des Massenoperators angeben. Das Ergebnis ist

$$\sum = W^n O(Z^{1/2}/Z^{n/2}), \quad (55)$$

wobei sich jedoch durch Kompensation der Leiterme die Z -Potenz in Einzelfällen erniedrigen kann, wie es z.B. in der ersten Ordnung der Fall ist. Die Aussage ist also nur, daß keine höheren Potenzen von Z auftreten können.

Die Abschätzung ist ein topologisches Problem und ergibt sich einfach durch Abzählen der inneren Fermionlinien und der Zahl der unabhängigen Integrationen, die nach Berücksichtigung der Energie-Impuls-Erhaltung an jedem Vertex übrig bleiben. Die Zahl der inneren Linien ist $2n - 1$. Denn ein Selbstenergiegraph entsteht aus einem zusammenhängenden Vakuumgraphen durch Aufschneiden einer Linie, hat also eine innere Linie weniger als der Vakuumgraph. Vakuumgraphen aber haben $4n/2$ Linien, da von jedem Vertex vier Linien ausgehen, die paarweise zu einer Linie verbunden werden. Jede innere Linie trägt zum Integranden den Propagator $1/(\gamma \cdot p - m + i\epsilon)$ bei, der sich wegen $p \sim Z^{1/2}$ wie $Z^{-1/2}$ verhält, wenn man die Variablentransformation $p^0 = \omega = Z^{1/2} \omega'$ macht. Demnach verhält sich der Integrand des Massenoperators in der n -ten Ordnung wie $Z^{-(2n-1)/2}$.

Wegen der Energie-Impuls-Erhaltung an den Vertizes bleiben n freie Impulse übrig. Die δ -Funktionen an den n Vertizes erlaubt die Integration über $n - 1$ Variable, da eine δ -Funktion für die gesamte Energie-Impuls-Erhaltung sorgt, also $2n - 1 - (n - 1) = n$ freie Integrationsvariable,

die die Summationen bzw. Integrationen

$$\frac{1}{Z^{3n}} \sum_{\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_n} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \dots \frac{d\omega_n}{2\pi} \quad (56)$$

ergeben. Wegen der Variablentransformation $\omega = Z^{1/2}\omega'$ ergibt dies einen Faktor $Z^{n/2}$, so daß

$$\sum = W^n O(Z^{n/2}/Z^{(2n-1)/2}) = W^n O(Z^{1/2}/Z^{n/2})$$

wie behauptet.

Wir erhalten in Übereinstimmung mit den Rechnungen der zweiten Ordnung das Resultat:

$$\sum = O(Z^{1/2}) \text{ für } W = O(Z^{1/2}) \quad (57)$$

(unabhängig von n)!

Das Ziel ist also nicht erreicht, einen endlichen Massenoperator in den höheren Ordnungen zu erhalten. Immerhin hat man erreicht, daß die Divergenzen in den höheren Ordnungen nicht immer schlimmer werden, wie das in einer Feldtheorie mit lokaler Vierfermionenwechselwirkung der Fall ist. Bestimmt man nämlich in der üblichen Weise den Divergenzgrad des Terms n -ter Ordnung in der Kontinuumstheorie, so erhält man

$$D = 4n - (2n - 1) = 2n + 1, \quad (58)$$

also ein lineares Anwachsen mit n . Der Divergenzgrad ist als Differenz der Potenzen von p im Zähler und Nenner definiert und das Integral konvergiert, wenn D negativ ist. Das Ergebnis (58) ergibt sich einfach als Differenz der Potenz $4n$ von den n freien Integrationsvariablen $d^4p_1 \dots d^4p_n$ im Zähler und der Potenz 1 für jeden Propagator der $2n - 1$ inneren Linien im Nenner.

Wählt man W unabhängig von Z , so ergibt sich aus Gl. (55) ein in jeder Ordnung verschwindender Massenoperator.

$$\Sigma = O(Z^{-(n-1)/2}) \text{ für } W = O(1). \quad (59)$$

Ein interessanter Fall könnte $W \sim Z^{1/4}$ sein, da dann

$$\Sigma = O(Z^{-(n/2-1)/2}) \text{ für } W = O(Z^{1/4}), \quad (60)$$

so daß man bis zur zweiten Ordnung einen endlichen Beitrag erhält, während alle höheren Ordnungen mindestens wie $Z^{-1/4}$ verschwinden. Dieser Fall wird zur Zeit untersucht. Da sich die Konsequenzen

einer solchen Wahl der Z -Abhängigkeit der Koppelungskonstanten im Detail noch nicht übersehen lassen, können noch keine endgültigen Angaben gemacht werden.

6. Zusammenfassung

Die Feynman-Regeln für die störungstheoretische Berechnung der Einteilchen-Green-Funktion oder des vollständigen Feynman-Propagators wurden für eine lokale Vierfermionenwechselwirkung angegeben und auf die Gitterraumtheorie übertragen. Die Graphen sind mit denen der Quantenelektrodynamik oder allgemeiner einer Theorie mit Yukawa-Koppelung identisch. Die Feynman-Regeln lassen sich im Wesentlichen übernehmen, wenn man den Photonpropagator durch eine δ -Funktion der Orts-Zeit-Koordinaten ersetzt und die Ordnung gleich der Zahl der Wechselwirkungslinien setzt.

Der Fermionpropagator für die Gitterraumtheorie wird explizit angegeben. Seine formale Ähnlichkeit mit dem Propagator konventioneller Feldtheorien sowie die qualitativen Unterschiede werden diskutiert. Die Fermionmasse wird für beide Vorzeichen der Koppelungskonstanten W durch einen Massenkorrekturterm in selbstkonsistenter Weise so bestimmt, daß die Selbstenergiegraphen erster Ordnung kompensiert werden. Die Lösung für $W > 0$ verletzt die chirale Symmetrie, die Lösungen für $W < 0$ die kubische Symmetrie der Theorie.

In der zweiten Ordnung der Störungstheorie divergiert der Massenoperator wie $Z^{1/2}$ (Z = Zahl der Gitterpunkte längs einer Kante des Periodizitätskubus). Es wird gezeigt, daß dieses Resultat für jede Ordnung n der Störungstheorie gültig ist, wenn man W proportional zu $Z^{1/2}$ setzt, während der Divergenzgrad einer konventionellen Feldtheorie mit lokaler Vierfermionkoppelung linear mit n (entsprechend $Z^{(2n+1)/2}$) wächst. Setzt man W proportional zu $Z^{1/4}$, so erhält man bis zur zweiten Ordnung einen endlichen Massenoperator, während alle höheren Ordnungen mindestens wie $Z^{-1/4}$ konvergieren.

Anhang

Zur Berechnung der Beiträge zweiter Ordnung zum Massenoperator bringen wir Gl. (53) und (54) auf die gemeinsame Form

$$\Sigma^{(a,b)}(h) = \frac{4W^2}{Z^6} \sum_{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f^{(a,b)}(h, h_1, h_2)}{(p_0^2 - m^2 + i\epsilon)(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (I)$$

wobei $p_0 = (\omega_0, \mathbf{p}_0)$ mit

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega + \omega_1 - \omega_2, \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}(\mathbf{h}_0) = \mathbf{p}(\mathbf{h} + \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)\end{aligned}\quad (\text{II})$$

(siehe Gl. (33) und (28)) und

$$\begin{aligned}f^{(a)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) &= O_j(\gamma \cdot p_0 + m) O_k \text{Sp}((\gamma \cdot p_1 + m) \\ &\quad O^j(\gamma \cdot p_2 + m) O^k),\end{aligned}\quad (\text{III})$$

$$\begin{aligned}f^{(b)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) &= -O_j(\gamma \cdot p_0 + m) O_k(\gamma \cdot p_1 + m) \\ &\quad O^j(\gamma \cdot p_2 + m) O^k.\end{aligned}\quad (\text{IV})$$

Ordnet man die Zähler der Integranden nach Potenzen von m , so folgt:

$$f^{(a,b)} = f_0^{(a,b)} + m f_1^{(a,b)} + m^2 f_2^{(a,b)} + m^3 f_3^{(a,b)}, \quad (\text{V})$$

$$f_0^{(a)} = O_j(\gamma \cdot p_0) O_k \text{Sp}((\gamma \cdot p_1) O^j(\gamma \cdot p_2) O^k),$$

$$\left. \begin{aligned}f_1^{(a)} &= O_j O_k \text{Sp}((\gamma \cdot p_1) O^j(\gamma \cdot p_2) O^k) \\ &\quad + O_j(\gamma \cdot p_0) O_k \text{Sp}((\gamma \cdot p_1) O^j O^k) \\ &\quad + O_j(\gamma \cdot p_0) O_k \text{Sp}((O^j(\gamma \cdot p_2) O^k))\end{aligned}\right\} \quad (\text{VI})$$

$$\left. \begin{aligned}f_2^{(a)} &= O_j(\gamma \cdot p_0) O_k \text{Sp}(O^j O^k) \\ &\quad + O_j O_k \text{Sp}((\gamma \cdot p_1) O^j O^k) \\ &\quad + O_j O_k \text{Sp}((O_j(\gamma \cdot p_2) O^k))\end{aligned}\right\}$$

$$\left. \begin{aligned}f_3^{(a)} &= O_j O_k \text{Sp}(O^j O^k),\end{aligned}\right\}$$

$$\left. \begin{aligned}f_0^{(b)} &= -O_j(\gamma \cdot p_0) O_k(\gamma \cdot p_1) O^j(\gamma \cdot p_2) O^k,\end{aligned}\right\}$$

$$\left. \begin{aligned}f_1^{(b)} &= -(O_j O_k(\gamma \cdot p_1) O^j(\gamma \cdot p_2) O^k) \\ &\quad + O_j(\gamma \cdot p_0) O_k(\gamma \cdot p_1) O^j O^k \\ &\quad + O_j(\gamma \cdot p_0) O_k O^j(\gamma \cdot p_2) O^k,\end{aligned}\right\} \quad (\text{VII})$$

$$\left. \begin{aligned}f_2^{(b)} &= -(O_j(\gamma \cdot p_0) O_k O^j O^k) \\ &\quad + O_j O_k(\gamma \cdot p_1) O^j O^k \\ &\quad + O_j O_k O^j(\gamma \cdot p_2) O^k,\end{aligned}\right\}$$

$$\left. \begin{aligned}f_3^{(b)} &= -O_j O_k O^j O^k.\end{aligned}\right\}$$

Macht man von den wohlbekannten Formeln

$$\text{Sp}((\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)) = 4a \cdot b, \quad \text{Sp}(\gamma_5(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)) = 0,$$

$$\gamma_\mu(\gamma \cdot a)\gamma^\mu = -2\gamma \cdot a, \quad \gamma_\mu(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)\gamma^\mu = 4a \cdot b,$$

$$\gamma_\mu(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)\gamma^\mu = -2(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a),$$

$$(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) + (\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a) = 2a \cdot b \quad (\text{VIII})$$

$$\text{Sp}((\gamma \cdot a)\gamma^\mu(\gamma \cdot b)\gamma^\nu) = 4(a^\mu b^\nu + b^\mu a^\nu - g^{\mu\nu}a \cdot b)$$

$$\Sigma^{(a,b)}(\mathbf{h}) = -\frac{4W^2}{Z^6} \sum_{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \frac{1}{8E_0 E_1 E_2} \left[\frac{f^{(a,b)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\omega - E_0 - E_1 - E_2 + i\varepsilon} \Big|_{\substack{\omega_0=E_0 \\ \omega_1=-E_1 \\ \omega_2=E_2}} - \frac{f^{(a,b)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\omega + E_0 + E_1 + E_2 - i\varepsilon} \Big|_{\substack{\omega_0=E_0 \\ \omega_1=E_1 \\ \omega_2=-E_2}} \right] \quad (\text{XI})$$

Die Gln. (IX–XI) gelten in Strenge. Wir interessieren uns für das Verhalten von $\Sigma(\mathbf{h})$ für $Z \rightarrow \infty$ und zwar für Wellenzahlen \mathbf{h} im „physikalischen“ Bereich $|\mathbf{h}| \ll Z/4$. Das asymptotische Verhalten wird wesentlich durch die Summanden mit \mathbf{h}_{1j} und \mathbf{h}_{2j} ($j = x, y, z$) in der Umgebung von $\pm Z/4$ bestimmt,

Gebrauch, so erhält man für die Wechselwirkung \mathbf{A} der Gitterraumtheorie, d.h. für die Matrizen O_j aus Gl. (3):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}: f^{(a)} &= 8p_0 \cdot (p_1(\gamma \cdot p_2) + p_2(\gamma \cdot p_1)) \\ &\quad + 8m p_1 \cdot p_2 + 8m^2(\gamma \cdot p_0) + 16m^3,\end{aligned}\quad (\text{IX})$$

$$\begin{aligned}f^{(b)} &= 8(\gamma \cdot p_1) p_2 \cdot p_0 + 4m((\gamma \cdot p_2)(\gamma \cdot p_1) + \\ &\quad + (\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot p_2)(\gamma \cdot p_0)) \\ &\quad + 4m^2(\gamma \cdot p_0 - \gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2) + 8m^3.\end{aligned}$$

Verwendet man die Wechselwirkung \mathbf{B} von NAMBU¹ im Gitterraum, Gl. (2), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{B}: f^{(a)} &= 8(\gamma \cdot p_0) p_1 \cdot p_2 + 8m^3, \\ f^{(b)} &= -4m(\gamma \cdot p_0)(\gamma \cdot p_2) - 4m^2(\gamma \cdot p_1).\end{aligned}\quad (\text{X})$$

Die Integration über ω_1 und ω_2 kann man mit Hilfe des Residuensatzes auf Polbeiträge zurückführen. Eine symmetrische Auswertung läßt sich dadurch erreichen, daß man Gl. (I) mit

$$\delta(\omega - \omega_0 + \omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0 + \omega_1 - \omega_2)s} ds$$

multipliziert und zusätzlich über ω_0 integriert. Spaltet man das Integral über s in die Intervalle $s > 0$ und $s < 0$ auf, so kann man im Fall $s > 0$ die Integrationswege in der ω_0 - und ω_2 -Ebene durch Halbkreise nach unten, den Weg in der ω_1 -Ebene durch einen Halbkreis nach oben schließen und erhält die Beiträge der Pole $\omega_0 = E_0$, $\omega_1 = -E_1$, $\omega_2 = E_2$ mit

$$E_j = E(\mathbf{p}_j) = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m^2}.$$

Im Fall $s < 0$ sind die Wege im entgegengesetzten Sinn zu schließen und man erhält die Beiträge der Pole bei $\omega_0 = -E_0$, $\omega_1 = E_1$, $\omega_2 = -E_2$. Nach der Integration über s ergibt sich

für die $|\mathbf{h}| \ll |\mathbf{h}_1|, |\mathbf{h}_2|$, so daß wir für unseren Zweck $\mathbf{h} = 0$ setzen können. In diesem Fall ist der Nenner des Integranden von Gl. (I) eine symmetrische Funktion von \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 , so daß wir uns auch im Zähler auf den symmetrischen Anteil beschränken können. Dieser ist für die beiden Wechselwir-

kungen nach Gl. (IX) und (X)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \quad f_{\text{sym.}}^{(a)} &= 8m p_1 \cdot p_2 + 16m^3, \\ f_{\text{sym.}}^{(b)} &= 4((\gamma \cdot p_1) p_2 - (\gamma \cdot p_2) p_1) \cdot p_0 \\ &\quad + 4m(p_1 \cdot p_2 + (\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot p_2) \gamma \cdot p_0) + 8m^3, \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}: \quad f_{\text{sym.}}^{(a)} &= 8m^3, \\ f_{\text{sym.}}^{(b)} &= 2m(\gamma \cdot p_0)(\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot p_2) \\ &\quad - 2m^2(\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2). \end{aligned} \quad (\text{XIII})$$

Eingesetzt in Gl. (XI) läßt sich leicht die Größenordnung der Terme abschätzen. Da in der überwiegenden Zahl der Summanden $\mathbf{p}_j = O(Z^{1/2})$ und $E_j = O(Z^{1/2})$ ergibt sich im Fall $W = W_0 Z^{1/2}$:

$$\mathbf{A}: \quad \Sigma^{(a)} = O(1), \quad \Sigma^{(b)} = O(Z^{1/2}), \quad (\text{XIV})$$

$$\mathbf{B}: \quad \Sigma^{(a)} = O(Z^{-1}), \quad \Sigma^{(b)} = O(1). \quad (\text{XV})$$

Unitäre S-Matrix im Lee-Modell mit „Dipolgeist“ und ein äquivalentes Modell

M. KAROWSKI

II. Institut für Theoretische Physik Hamburg,

(Z. Naturforsch. **24 a**, 510—515 [1969]; eingegangen am 31. Dezember 1968)

The $N - 2\Theta$ -sector of the Lee-model is solved in the special case of the “dipol-ghost”, and a unitary S -matrix is constructed. A general instruction is presented to construct the physical subspace of the whole state space with indefinite metric. This method is always applicable, if there are couples of “good” and “bad” ghosts. Another model with positiv definite state space is described, which has the same S -matrix as the Lee-model with “dipol-ghost” in the $N - \Theta$ - and $N - 2\Theta$ -sector.

1. Einleitung

In den vergangenen Jahren sind mehrere Arbeiten¹ erschienen, die mit Hilfe von Dispersionsmethoden exakte Lösungen des Lee Modells im $N - 2\Theta$ -Sektor angeben. Diese Methoden werden in Abschnitt 2 angewendet auf den Fall, daß ein sogenannter „Dipolgeist“² vorhanden ist.

Bekanntlich treten wegen der indefiniten Metrik, die mit den Geisterzuständen verbunden ist, Schwierigkeiten bei der physikalischen Interpretation auf. Die Unitarität des formalen S -Operators läßt sich nicht wie üblich als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ deuten. HEISENBERG hat gezeigt³, daß man im Dipolfall diese Schwierigkeiten beseitigen kann. Das wird anhand der exakten Lösungen ausgeführt.

Es gibt eine allgemeine Vermutung³, daß eine lokale Quantenfeldtheorie, die in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik formuliert wird, in gewisser Weise einer nichtlokalen Theorie in einem normalen Hilbert-Raum äquivalent ist. In Abschnitt 3. wird dementsprechend ein nichtlokales Modell mit positiv definiter Metrik angegeben, das im $N - \Theta$ - und $N - 2\Theta$ -Sektor dieselbe S -Matrix

impliziert wie das Lee-Modell mit „Dipolgeist“. Es handelt sich um ein Modell mit separablem Potential, das jedoch nicht konstruierbar ist, wenn bei dem zugehörigen Lee Modell der Grenzfall der Punktquelle vorliegt.

2. Lee-Modell mit „Dipolgeist“

Der Hamilton-Operator des Lee-Modells im Impulsraum ist

$$H = H_0 + H' \quad (1)$$

mit dem freien Teil

$$H_0 = \int_{\mu}^{\infty} d\omega \omega a^+(\omega) a(\omega) \quad (2)$$

und dem Wechselwirkungsteil

$$H' = \int d\omega u(\omega) [V^+ N a(\omega) + h.c.] + Z \delta m V^+ V. \quad (3)$$

N , V und $a(\omega)$ sind die Vernichtungsoperatoren der Teilchen N , V und Θ . Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit werden die Massen der beiden schweren Teilchen N und V gleichgesetzt. Da

¹ R. D. AMADO, Phys. Rev. **122**, 696 [1961]. — R. D. AMADO u. R. P. KENSCHAFT, J. Math. Phys. **5**, 1340 [1964]. — A. PAGNAMENTA, J. Math. Phys. **6**, 955 [1965]. — C. M. SOMMERFIELD, J. Math. Phys. **6**, 1170 [1965]. — K. KAZES, J. Math. Phys. **6**, 1772 [1965]. — G. T. TINDLE, Nuovo Cim. **45**, 619 [1966].

² W. HEISENBERG, Nucl. Phys. **4**, 532 [1957].

³ H. P. DÜRR, Indefinite Metric and Nonlocal Interaction, Proc. of the Intern. Symposium on Quantum Field Theory, 69, Preprint Joint Institute for Nuclear Research, Dubna P2-3590 [1967].